

一、单选题

1. 下列哪个选项是实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$ 的矩阵表示?

A. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

【答案】A

【解析】根据二次型的矩阵表示，主对角线元素对应于平方项的系数，非对角线元素对应于交叉项系数的一半。因此，矩阵的(1,2)和(2,1)位置应该是-1（对应 $-2x_1x_2$ 项），(2,3)和(3,2)位置也应该是-1（对应 $-2x_2x_3$ 项）。其他位置保持不变。

【知识点】实二次型的矩阵表示。

2. 对于矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ，下列哪个向量是 A 的属于特征值 2 的特征向量?

A. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

【答案】B

【解析】

【解析】为了找到特征向量，需要解齐次线性方程组 $(2E - A)x = 0$ ，其中 E 是单位矩阵。对于特征值 2，方程组变为 $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，解得 $x_1 = -x_2$ ，因此 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是符合条件的特征向量。

【知识点】特征向量的求解。

3. 一个矩阵 A 的秩为 3，下列哪一项是关于矩阵 A 的正确陈述?

A. 矩阵 A 的所有 3 阶子式都不为零。

- B. 矩阵 A 的所有 4 阶子式都为零。
 C. 矩阵 A 至少有一个 3 阶子式不为零。
 D. 矩阵 A 的所有 2 阶子式都为零。

【答案】C

【解析】矩阵的秩定义为矩阵中最大非零子式的阶数。因此，如果秩为 3，则至少有一个 3 阶子式不为零。

【知识点】矩阵的秩。

4. 在解线性方程组 $Ax = b$ 时，如果系数矩阵 A 的行列式 $|A| \neq 0$ ，那么该方程组的解的情况是？

- A. 无解
 B. 无穷多解
 C. 唯一解
 D. 不确定

【答案】C

【解析】

根据克莱姆法则，如果系数矩阵 A 的行列式 $|A| \neq 0$ ，则方程组有唯一解。

【知识点】克莱姆法则。

5. 如果一个矩阵 A 可逆，则 A 的伴随矩阵 A^* 的逆矩阵是？

- A. A
 B. A^{-1}
 C. $(A^{-1})^*$
 D. A^*

【答案】C

【解析】

对于可逆矩阵 A ， $A^*A = |A|E$ ，其中 $|A| \neq 0$ ，则 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ 。

【知识点】伴随矩阵的性质。

6. 下列哪个矩阵是实对称矩阵？

- A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
 B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
 C. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
 D. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

【答案】B

【解析】

实对称矩阵满足 $A = A^T$ ，即矩阵与其转置相等。只有选项 B 满足这一条件。

【知识点】实对称矩阵的定义。

7. 若矩阵 A 的特征值为 1、2 和 3，那么矩阵 A^2 的特征值是？

- A. 1、2、3
- B. 2、4、6
- C. 1、4、9
- D. 无法确定

【答案】C

【解析】

矩阵 A^2 的特征值是 A 的特征值的平方。因此，如果 A 的特征值是 1、2 和 3，那么 A^2 的特征值将是 1、4 和 9。

【知识点】特征值的性质。

8. 下列哪一个条件是矩阵 A 正定的必要条件？

- A. A 的所有顺序主子式都大于零。
- B. A 的所有顺序主子式都小于零。
- C. A 的所有顺序主子式都不小于零。
- D. A 的所有顺序主子式都不大于零。

【答案】A

【解析】正定矩阵的定义之一是其所有顺序主子式都大于零。

【知识点】正定矩阵的判定条件。

9. 若向量 $\alpha = (1, 2, 3)$ 和 $\beta = (3, 2, 1)$ 的内积为？

- A. 10
- B. 6
- C. 12
- D. 8

【答案】A

【解析】

向量 α 和 β 的内积定义为 $\alpha \cdot \beta = 1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 1 = 10$ 。

【知识点】向量的内积计算。

10.

对于实二次型 $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$ ，下列哪一项描述是正确的？

- A. 正定二次型
- B. 半正定二次型
- C. 负定二次型
- D. 不定二次型

【答案】A

【解析】

该二次型的矩阵表示为 $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ 。计算该矩阵的顺序主子式， $2 > 0$ 且 $2 \times 5 - 2 \times 2 = 6 > 0$ ，因此它是正定的。

【知识点】正定二次型的判断。

11. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ，下列哪个向量是 A 的属于特征值 3 的特征向量？

A. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

【答案】B

【解析】

【解析】为了找到特征向量，需要解齐次线性方程组 $(3E - A)x = 0$ ，其中 E 是单位矩阵。对于特征值 3，方程组变为 $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，解得 $x_1 = 2x_2$ ，因此 $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是符合条件的特征向量。

【知识点】特征向量的求解。

12. 一个 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 1、2 和 3，矩阵 A 的秩是多少？

A.1

B.2

C.3

D.0

【答案】C

【解析】对于一个实对称矩阵，其秩等于非零特征值的个数。既然 A 有三个非零特征值，那么它的秩就是 3。

【知识点】实对称矩阵的性质。

13. 下列哪一个条件是矩阵 A 负定的必要条件？

A. A 的所有偶数阶顺序主子式都大于零，所有奇数阶顺序主子式都小于零。

B. A 的所有偶数阶顺序主子式都小于零，所有奇数阶顺序主子式都大于零。

C. A 的所有顺序主子式都小于零。

D. A 的所有顺序主子式都大于零。

【答案】A

【解析】对于负定矩阵，其所有偶数阶顺序主子式都大于零，所有奇数阶顺序主子式都小于零。

【知识点】负定矩阵的判定条件。

14. 若矩阵 A 的特征值为 1、2 和 3，那么矩阵 A^{-1} 的特征值是？

A.1、2、3

B.2、4、6

C.1、4、9

D. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

【答案】D

【解析】

矩阵 A^{-1} 的特征值是 A 的特征值的倒数。因此，如果 A 的特征值是 1、2 和 3，那么 A^{-1} 的特征值将是 $1, \frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ 。

【知识点】特征值的性质。

15. 下列哪个矩阵是反对称矩阵？

A. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

【答案】A

【解析】

反对称矩阵满足 $A = -A^T$ ，即矩阵与其转置的负矩阵相等。只有选项 A 满足这一条件。

【知识点】反对称矩阵的定义。

16. 若向量 $\alpha = (1, 2, 3)$ 和 $\beta = (3, 2, 1)$ 的内积为？

A.10

B.6

C.12

D.8

【答案】A

【解析】

向量 α 和 β 的内积定义为 $\alpha \cdot \beta = 1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 1 = 10$ 。

【知识点】向量的内积计算。

17.

对于实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$ ，下列哪一项描述是正确的？

A. 正定二次型

B. 半正定二次型

C. 负定二次型

D.不定二次型

【答案】D

【解析】

【解析】该二次型的矩阵表示为 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ 。计算该矩阵的顺序主子式，第一个主子式 $2 > 0$ ，第二个主子式 $2 \times 3 - 2 \times 2 = 2 > 0$ ，第三个主子式 $2 \times 3 \times 5 - 2 \times 2 \times 2 - 2 \times 2 \times 2 = 26 > 0$ ，但由于存在交叉项，无法直接判断其正定性。考虑到 $f(1, -1, 0) = 2 - 4 = -2 < 0$ ，因此该二次型是不定的。

【知识点】不定二次型的判断。

18.若矩阵 A 的秩为 2，下列哪一项是关于矩阵 A 的正确陈述？

A.矩阵 A 的所有 2 阶子式都不为零。

B.矩阵 A 的所有 3 阶子式都为零。

C.矩阵 A 至少有一个 2 阶子式不为零。

D.矩阵 A 的所有 1 阶子式都为零。

【答案】C

【解析】矩阵的秩定义为矩阵中最大非零子式的阶数。因此，如果秩为 2，则至少有一个 2 阶子式不为零。

【知识点】矩阵的秩。

19.

在解线性方程组 $Ax = b$ 时，如果系数矩阵 A 的秩为 3，而增广矩阵 $(A|b)$ 的秩为 4，那么该方程组的解的情况是？

A.无解

B.无穷多解

C.唯一解

D.不确定

【答案】A

【解析】根据线性方程组的解的性质，如果系数矩阵 A 的秩与增广矩阵 $(A|b)$ 的秩不相等，则方程组无解。

【知识点】线性方程组解的存在性。

20.若矩阵 A 可逆，那么矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 的行列式是？

A. $|A|$

B. $|A|^2$

C. $|A|^{-1}$

D. $|A|^{-2}$

【答案】B

【解析】

【解析】对于可逆矩阵 A， $A^*A = |A|E$ ，则 $|A^*||A| = |A|^n$ （这里 n 为矩阵的阶数）。因此， $|A^*| = |A|^{n-1}$ 。对于 $n \times n$ 的矩阵， $n-1 = n-1$ ，所以 $|A^*| = |A|^2$ 。

【知识点】伴随矩阵的行列式。

二、填空题

1. 对于矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, 其特征值为 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = -1$, 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的一个特征向量为 ____。

【答案】 $(1,1)^T$

【解析】通过求解 $(A - \lambda_1 E)x = 0$ 得到特征向量 $(1,1)^T$ 。

【知识点】特征值与特征向量的计算。

2. 矩阵 $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩为 ____。

【答案】3

【解析】矩阵 B 的行阶梯形矩阵有 3 行非零行，因此秩为 3。

【知识点】矩阵的秩。

3. 行列式 $|C|$, 其中 $C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, 的值为 ____。

【答案】0

【解析】行列式 $|C|$ 的值可以通过展开计算得出，但观察到矩阵的第三行是第一行加上第二行，意味着行列式为 0。

【知识点】行列式的计算。

4. 矩阵 $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ 的秩为 ____。

【答案】2

【解析】矩阵 D 的行阶梯形矩阵有 2 行非零行，因此秩为 2。

【知识点】矩阵的秩。

5. 行列式 $|E|$, 其中 $E = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$, 的值为 ____。

【答案】0

【解析】行列式 $|E|$ 的值可以通过展开计算得出，但观察到矩阵的第三行是第一行加上四倍的第二行，意味着行列式为 0。

【知识点】行列式的计算。

6. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值为 ____ 和 ____。

【答案】3,3

【解析】

【解析】计算特征多项式 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 5) - 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 9$, 解特征方程 $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ 得到特征值 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 3$ 。

【知识点】特征值的计算。

7. 对于实二次型 $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$, 其对应的矩阵表示为_____。

【答案】

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

【解析】

实二次型的矩阵表示形式为 $(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 。

【知识点】实二次型的矩阵表示。

8. 矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的秩为_____。

【答案】3

【解析】矩阵 B 是一个对角矩阵, 并且所有的对角线元素都不为零, 因此秩为 3。

【知识点】矩阵的秩。

9. 矩阵 $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵 C^* 为_____。

【答案】

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

【解析】

矩阵 C 的伴随矩阵 C^* 由 C 的代数余子式转置得到, 即 $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ 。

【知识点】伴随矩阵的计算。

10.

对于矩阵 $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, 其特征多项式为_____。

【答案】 $\lambda^2 - 6\lambda + 9$

【解析】

计算特征多项式 $|\lambda E - D| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -3 \\ -4 & \lambda - 5 & -6 \\ -7 & -8 & \lambda - 9 \end{vmatrix}$, 经过计算可得 $\lambda^2 - 6\lambda + 9$ 。

【知识点】特征多项式的计算。

三、计算题

1.

计算矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值和对应的特征向量。

【答案】

特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$; 特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

【解析】

【解析】首先计算特征多项式 $f(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ -4 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) + 8 = \lambda^2 - 2\lambda + 5$. 解特征方程

$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ 得到特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. 对于特征值 $\lambda_1 = 1$, 求解方程组 $(A - \lambda_1 E)x = 0$ 得到特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

对于特征值 $\lambda_2 = -1$, 求解方程组 $(A - \lambda_2 E)x = 0$ 得到特征向量 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

【知识点】特征值与特征向量的计算。

求矩阵 $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩。

2.

【答案】秩为 3

【解析】首先将矩阵 B 化为阶梯形矩阵。矩阵 B 已经是行阶梯形，可以直接看出它的非零行有 3 行，因此秩为 3。

【知识点】矩阵的秩。

计算行列式 $|C|$ 的值，其中 $C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

3.

【答案】0

【解析】

【解析】计算行列式 $|C|$ 的值: $|C| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (45 - 48) - 2 \cdot (36 - 42) + 3 \cdot (32 - 35) = -3 + 12 - 9 = 0$

【知识点】行列式的计算。

对于矩阵 $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, 求 $r(D)$ 。

4.

【答案】2

【解析】

【解析】矩阵 D 的秩可以通过计算其行阶梯形矩阵的非零行数来确定。矩阵 D 的行阶梯形矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 因此秩为

2。

5.

计算行列式 $|E|$ 的值, 其中 $E = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$.

【答案】0

【解析】

【解析】计算行列式 $|E|$ 的值: 行列式 $|E|$ 可以通过计算第一行的余子式来简化, 但更简单的方法是观察到矩阵的第三行是第一行加上四倍的第二行, 这意味着矩阵的行列式为 0。

【知识点】行列式的计算。

四、证明题

1. 设矩阵 A 为 n 阶矩阵, 并且 $|A| \neq 0$, 证明矩阵 A 可逆。

【答案】

【答案】要证明矩阵 A 可逆, 需证明存在矩阵 B 使得 $AB = BA = E$ 。由于 $|A| \neq 0$, 根据行列式的性质, 这意味着 A 的行向量组线性无关, 进而 A 的列向量组线性无关。因此, A 可以通过一系列初等行变换转化为单位矩阵 E , 即存在一系列初等矩阵 $P_1, P_2, \dots, P_k$ 使得 $P_k P_{k-1} \dots P_1 A = E$ 。由于初等矩阵都是可逆的, 所以 A 也可通过这些初等矩阵的逆矩阵 $P_1^{-1}, P_2^{-1}, \dots, P_k^{-1}$ 来左乘 E 得到 A , 即 $A = P_1^{-1} P_2^{-1} \dots P_k^{-1} E = P_1^{-1} P_2^{-1} \dots P_k^{-1}$ 。因此, 取 $B = P_k P_{k-1} \dots P_1$ 即可使得 $AB = BA = E$, 从而证明 A 可逆。

【解析】根据行列式非零的性质, 结合初等变换的知识进行证明。

【知识点】矩阵的可逆性与行列式的性质。

2. 若 A 是 n 阶矩阵, 并且存在非零向量 α 使得 $A\alpha = 0$, 证明 A 不可逆。

【答案】

【答案】要证明矩阵 A 不可逆, 即证明不存在矩阵 B 使得 $AB = BA = E$ 。由于存在非零向量 α 满足 $A\alpha = 0$, 说明 A 的列向量组线性相关, 即 A 的秩小于 n 。根据矩阵可逆的条件之一, 矩阵可逆当且仅当其秩等于阶数, 即 $r(A) = n$ 。因此, 既然 A 的秩小于 n , 那么 A 必定不可逆。

【解析】根据矩阵的秩与可逆性的关系, 结合线性相关的定义进行证明。

【知识点】矩阵的可逆性与秩的关系。

3. 设 A 是 n 阶矩阵, 如果 $A^2 = A$, 证明 A 的特征值只能是 0 或 1。

【答案】

【答案】设 λ 是矩阵 A 的一个特征值, 对应的特征向量为 α , 即 $A\alpha = \lambda\alpha$ 。由于 $A^2 = A$, 将 α 代入得到 $A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda(\lambda\alpha) = \lambda^2\alpha = A\alpha = \lambda\alpha$ 。由此可知 $\lambda^2\alpha = \lambda\alpha$, 即 $\lambda^2 = \lambda$ 。因此 λ 必须满足 $\lambda^2 - \lambda = 0$, 解得 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 1$ 。

【解析】根据矩阵幂等性的性质, 结合特征值的定义进行证明。

【知识点】矩阵幂等性与特征值的关系。

一、单选题

1. 对于一个 n 阶行列式，如果其某一行的元素全部为 0，那么该行列式的值是多少？

- A. -1
- B. 0
- C. 1
- D. 无法确定

【答案】B

【解析】当行列式的一行（或一列）元素全为 0 时，依据行列式的性质，该行列式的值也为 0。

【知识点】行列式的性质

2. 如果一个三阶行列式的值为 -2，且其中一个 2 阶子式的值为 1，其对应的代数余子式的值是多少？

- A. -1
- B. 0
- C. 1
- D. 不能确定

【答案】D

【解析】2 阶子式的代数余子式取决于剩余元素组成的 1 阶行列式的值以及适当的符号变化，仅凭给定信息无法确定。

【知识点】行列式的代数余子式

3. 三阶行列式展开后的项数共有多少项？

- A. 2
- B. 3
- C. 6
- D. 9

【答案】C

【解析】三阶行列式展开后的项数为 3 的阶乘，即 $3!=6$ 项。

【知识点】行列式的展开式

4. 根据克拉默法则，若一个三元线性方程组的系数行列式不为 0，则该方程组有多少组解？

- A. 无解
- B. 无穷多解
- C. 唯一解
- D. 两组解

【答案】C

【解析】根据克拉默法则，如果方程组的系数行列式不等于 0，则方程组有唯一解。

【知识点】克拉默法则

5. 对于任意一个 $m \times n$ 矩阵，是否可以通过一系列初等行变换化为阶梯形矩阵？

- A. 是
- B. 不是

- C.取决于矩阵的秩
D.取决于矩阵的元素值

【答案】A

【解析】任意一个 $m \times n$ 矩阵都可以通过一系列初等行变换转化为阶梯形矩阵，这是因为矩阵的初等变换不改变矩阵的秩，而阶梯形矩阵的特点使其更容易确定矩阵的秩。

【知识点】矩阵的初等变换，矩阵的阶梯形，矩阵的秩

6.若矩阵 A 是一个 3 阶矩阵，并且 $|A|=-2$ ，那么 $|A^3|$ 等于多少？

- A.-8
B.-4
C.4
D.8

【答案】A

【解析】矩阵行列式的性质之一是，如果 A 是一个 n 阶矩阵，那么 $|A^n|=|A|^n$ 。所以 $|A^3|=(-2)^3=-8$ 。

【知识点】矩阵行列式的性质，矩阵的幂

7.如果矩阵 A 为 n 阶对称矩阵，那么 A 的转置 A^T 等于什么？

- A.A
B.-A
C.E
D.0

【答案】A

【解析】对称矩阵的定义是，矩阵 A 的元素满足 $a[i][j]=a[j][i]$ ，因此对于 n 阶对称矩阵来说，它的转置等于它本身。

【知识点】对称矩阵的定义，矩阵的转置

8.如果矩阵 A 是一个 n 阶矩阵，并且 $|A| \neq 0$ ，那么矩阵 A 是否可逆？

- A.可逆
B.不可逆
C.取决于矩阵的具体元素
D.取决于矩阵的秩

【答案】A

【解析】 n 阶矩阵 A 可逆的必要充分条件是 A 的行列式不等于 0，即 $|A| \neq 0$ 。

【知识点】矩阵的可逆性，矩阵行列式的性质

9.若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的秩为 $r(r < n)$ ，则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 中

- A.多于 r 个向量的部分组必线性相关
B.多于 r 个向量的部分组必线性无关
C.少于 r 个向量的部分组必线性相关
D.少于 r 个向量的部分组必线性无关

【答案】A

【解析】如果一个向量组的秩为 r ，那么这个向量组中任何超过 r 个向量的子集必定线性相关，因为秩定义为最大线性无关组的向量数目。

【知识点】向量组的秩及线性相关性的定义

10. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 0)$, $\alpha_2 = (0, 1, 0)$, 下列向量中可以由 α_1, α_2 线性表出的是

- A. $(2, 0, 0)$
- B. $(-3, 2, 4)$
- C. $(1, 1, 0)$
- D. $(0, -1, 4)$

【答案】C

【解析】向量 $(1, 1, 0)$ 可以通过将 α_1 加上 α_2 得到, 即 $(1, 0, 0) + (0, 1, 0) = (1, 1, 0)$, 而其他选项要么含有第三个分量非零, 要么无法通过 α_1 和 α_2 的线性组合获得。

【知识点】向量的线性组合与线性表出

11. 设 A 为 n 阶矩阵 ($|A| = 0$), 则下列结论中错误的是

- A. $r(A) < n$
- B. A 必有两行元素成比例
- C. A 的 n 个列向量线性相关
- D. A 有一个行向量可由其余 $n-1$ 个行向量线性表出

【答案】B

【解析】矩阵行列式为零意味着矩阵的秩小于阶数 n , 即存在线性相关的行或列向量。但是说矩阵必有两行元素成比例过于绝对, 不一定正确。

【知识点】矩阵的秩与行列式的性质

12. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 且 $r(A) = m < n$, 那么齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系由多少个解向量构成?

- A. m 个
- B. n 个
- C. $n-m$ 个
- D. 0 个

【答案】C

【解析】由于 $r(A) = m$, 且 $m < n$, 说明系数矩阵 A 的秩小于未知量的数目, 因此齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解, 基础解系由 $n - r(A) = n - m$ 个解向量构成。

【知识点】齐次线性方程组的基础解系构成

13. 若齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有两个不同的解 α_1 和 α_2 , 那么下列哪个选项一定是该方程组的解?

- A. $\alpha_1 + \alpha_2$
- B. $\alpha_1 - \alpha_2$
- C. $2\alpha_1$
- D. 0

【答案】A

【解析】齐次线性方程组的解集是一个向量空间, 任何两个解的和仍是该方程组的解。因此 $\alpha_1 + \alpha_2$ 也应是方程组的解。

【知识点】齐次线性方程组解的性质

14. 若非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 有解，则系数矩阵 A 的秩与增广矩阵 (A, β) 的秩的关系是什么？

A. $r(A) > r(A, \beta)$

B. $r(A) < r(A, \beta)$

C. $r(A) = r(A, \beta)$

D. $r(A)$ 与 $r(A, \beta)$ 之间没有确定关系

【答案】C

【解析】非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 有解的充要条件是系数矩阵 A 的秩等于增广矩阵 (A, β) 的秩。

【知识点】非齐次线性方程组有解的条件

15. 下列哪个陈述正确描述了矩阵与其特征值的关系？

A. 如果 λ 是矩阵 A 的一个特征值，那么矩阵 $A+kE$ (k 为任意常数) 的特征值为 $\lambda + k$ 。

B. 如果 λ 是矩阵 A 的一个特征值，那么矩阵 $A+kE$ (k 为任意常数) 的特征值为 $\lambda * k$ 。

C. 如果 λ 是矩阵 A 的一个特征值，那么矩阵 $A+kE$ (k 为任意常数) 的特征值为 λ / k 。

D. 如果 λ 是矩阵 A 的一个特征值，那么矩阵 $A+kE$ (k 为任意常数) 的特征值为 $\lambda - k$ 。

【答案】A

【解析】如果 λ 是矩阵 A 的一个特征值，那么对于任何常数 k ，矩阵 $A+kE$ 的特征值将是 λ 加上 k 。这是基于特征值与矩阵操作之间的关系。

【知识点】矩阵特征值的变化规律

16. 对于一个 n 阶矩阵 A ，如果 A 的所有特征值都是实数，并且 A 的属于不同特征值的特征向量相互正交，那么 A 是什么类型的矩阵？

A. 上三角矩阵

B. 对角矩阵

C. 实对称矩阵

D. 正交矩阵

【答案】C

【解析】实对称矩阵的特征值都是实数，并且属于不同特征值的特征向量相互正交。

【知识点】实对称矩阵的性质

17. 如果一个矩阵 A 可以对角化，意味着什么？

A. 矩阵 A 一定是对称矩阵。

B. 矩阵 A 一定有一个特征值为 0。

C. 矩阵 A 存在 n 个线性无关的特征向量。

D. 矩阵 A 的行列式为 1。

【答案】C

【解析】矩阵 A 可以对角化的条件是它拥有 n 个线性无关的特征向量。这意味着存在一个可逆矩阵 P ，使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵。

【知识点】矩阵对角化的条件

18. 下列哪一个条件是判断一个实二次型为正定二次型的必要条件？

A. 二次型的所有顺序主子式均大于零

- B.二次型的矩阵秩小于其阶数
C.二次型的矩阵所有特征值中至少有一个为零
D.二次型中至少存在一个平方项系数为负

【答案】A

【解析】一个实二次型为正定二次型的必要条件之一是其矩阵的所有顺序主子式都必须大于零，这是判断正定性的关键准则。

【知识点】正定二次型的判断准则

19.若一个三元二次型的标准形为 $f=y^2-y^3$ ，那么该二次型的正惯性指数是多少？

- A.0
B.1
C.2
D.3

【答案】B

【解析】标准形 $f=y^2-y^3$ 含有一个正平方项和一个负平方项，因此正惯性指数为 1。

【知识点】二次型的正惯性指数

20.对于一个实对称矩阵 A ，如果 A 为正定矩阵，那么 A 的逆矩阵 A^{-1} 是什么类型的矩阵？

- A.正定矩阵
B.半正定矩阵
C.负定矩阵
D.不定矩阵

【答案】A

【解析】如果矩阵 A 是正定的，那么它的逆矩阵 A^{-1} 也是一个实对称矩阵，并且所有特征值都是正数，因此 A^{-1} 也是正定矩阵。

【知识点】正定矩阵的逆矩阵性质

二、填空题

1.设向量组 $\alpha_1=(1,2,3)$ ， $\alpha_2=(4,5,6)$ ，则向量组 α_1, α_2 的秩为__。

【答案】2

【解析】向量组的秩是指向量组构成的矩阵的秩，即矩阵中线性无关的行或列的最大数目。这里可以通过计算发现 α_1 和 α_2 线性无关，因此秩为 2。

【知识点】向量组的秩，线性无关。

2.若向量 $\alpha=(1,2,3)$ ， $\beta=(4,5,6)$ ，则 α 与 β 的内积 (α, β) 等于__。

【答案】32

【解析】内积的计算方法是将两个向量对应坐标的乘积求和，即 $1*4+2*5+3*6=32$ 。

【知识点】向量的内积。

3.若向量 $\alpha_1=(3,1,k)$ ， $\alpha_2=(4,k,0)$ ， $\alpha_3=(1,0,k)$ 线性无关，则 k 的取值应满足__且__。

【答案】 $k \neq -1, k \neq 2$

【解析】三个向量线性无关意味着它们形成的矩阵的行列式不为 0。对于给定的向量组，计算行列式后，找到使得行列式不为 0 的 k 值。

【知识点】线性无关，行列式。

4. 设矩阵 A 为一个 n 阶正交矩阵, 那么 $|A|$ 的值为__。

【答案】 ± 1

【解析】正交矩阵的行列式的绝对值总是 1, 所以行列式只能取 ± 1 。

【知识点】正交矩阵的性质。

5. 设向量 $\alpha_1 = (1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 1, 0)$, $\alpha_3 = (1, 0, 0)$, $\beta = (0, 1, 1)$, 则 β 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出的表示式为 $\beta =$ __。

【答案】 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

【解析】找到系数 k_1, k_2, k_3 使得 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 = \beta$, 通过解线性方程组得出 $k_1 = -1, k_2 = 1, k_3 = 1$ 。

【知识点】向量的线性表出。

6. _____是指方程组 $Ax=0$ 的解向量中, 除了零解外, 还存在的非零解向量。

【答案】齐次线性方程组的非零解

【解析】此题考查学生对齐次线性方程组解的理解, 特别是当系数矩阵的秩小于未知量个数时, 方程组存在非零解。

【知识点】齐次线性方程组、矩阵的秩

7. 如果矩阵 A 可逆, 则矩阵 A 的特征值_____为零。

【答案】不

【解析】此题基于可逆矩阵的性质, 如果矩阵可逆, 那么它的行列式非零, 进而它的特征值也不能为零。

【知识点】可逆矩阵、特征值

8. 实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x$ 中, 若矩阵 A 为负定矩阵, 则该二次型为_____二次型。

【答案】负定

【解析】题目考察的是实二次型与矩阵性质的关系, 若矩阵 A 为负定矩阵, 则对于任何非

零向量 $f(x) < 0$, 即该二次型为负定二次型。

【知识点】实二次型、负定矩阵

9. 在求解线性方程组的过程中, 如果系数矩阵 A 经过初等行变换化为阶梯形矩阵后, 非零行的数目为 r , 且 r 小于未知量的个数 n , 则方程组有_____解。

【答案】无穷多

【解析】当系数矩阵的秩小于未知量的个数时, 线性方程组会有无穷多个解。

【知识点】线性方程组的解的性质

10. 对于 n 阶矩阵 A , 如果存在 n 阶正交矩阵 Q 使得 $Q^{-1} A Q$ 为对角矩阵, 则称矩阵 A 可以_____。

【答案】对角化

【解析】此题考查矩阵对角化的概念，即存在一个正交矩阵 Q 使得矩阵 A 在变换后成为对角矩阵。

【知识点】矩阵的对角化

三、计算题

1. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ，求矩阵 A 的特征值和特征向量。

【答案】

特征多项式为 $\lambda^2 - 6\lambda - 1$ ，特征值为 $\lambda_1 = 3 + \sqrt{10}$, $\lambda_2 = 3 - \sqrt{10}$ 。对应的特征向量分别为 $(\sqrt{10} - 1, 2)^T$ 和 $(-\sqrt{10} - 1, 2)^T$ 。

【解析】首先写出矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda E - A|$ ，然后解特征方程得到特征值。接着

对于每个特征值，解齐次线性方程组 $(\lambda E - A)x = 0$ 找到对应的特征向量。

【知识点】矩阵的特征值与特征向量的求法。

2. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值，并使用正交变换将 A 对角化。

【答案】

特征值为 $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1$ ，对应的正交特征向量为 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T, (0, 0, 1)^T$ ，正交矩阵 Q 为 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。

【解析】：首先计算矩阵 A 的特征多项式并求解特征值，然后找到每个特征值对应的特征向量，并对其进行正交化和单位化，形成正交矩阵 Q ，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

【知识点】特征值与特征向量的求法、矩阵的正交对角化。

3. 求解线性方程组 $2x_1 + 3x_2 = 8, 4x_1 + 7x_2 = 17$ 。

【答案】解为 $x_1 = 1, x_2 = 2$ 。

【解析】将方程组写成矩阵形式 $Ax = b$ ，其中 A 为系数矩阵， x 为未知数向量， b

为常数向量。使用高斯消元法求解。

【知识点】线性方程组的高斯消元法。

4.求下列向量组的秩和一个极大无关组：

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

【答案】秩为 2，极大无关组为 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 。

【解析】将向量组组成矩阵，通过矩阵的初等行变换求出矩阵的阶梯形，从而确定矩阵的秩及极大无关组。

【知识点】向量组的秩、极大无关组的求法。

5.求二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$ 的矩阵，并判断该二次型是否为正定二次型。

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

【答案】二次型的矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ ，该二次型是正定的。

【解析】构造二次型的矩阵，并检验矩阵的所有顺序主子式是否都大于零。

【知识点】二次型的矩阵表示，正定二次型的判定。

四、证明题

1.设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，证明：向量组 $\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 3\alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关。

【答案】

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则对于任意一组不全为零的数 k_1, k_2, k_3 , 有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 \neq 0.$$

考虑向量组 $\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 3\alpha_3 + \alpha_1$, 假设存在一组数 l_1, l_2, l_3 使得

$$l_1(\alpha_1 + 2\alpha_2) + l_2(2\alpha_2 + 3\alpha_3) + l_3(3\alpha_3 + \alpha_1) = 0.$$

整理得

$$(l_1 + l_3)\alpha_1 + (2l_1 + 2l_2)\alpha_2 + (3l_2 + 3l_3)\alpha_3 = 0.$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 所以有

$$l_1 + l_3 = 0,$$

$$2l_1 + 2l_2 = 0,$$

$$3l_2 + 3l_3 = 0.$$

解这个方程组得到

$$l_1 = -l_3,$$

$$l_2 = -l_1 = l_3,$$

$$l_3 = -l_2 = l_1.$$

从而有

$$l_1 = -l_1 \Rightarrow 2l_1 = 0 \Rightarrow l_1 = 0,$$

$$l_2 = 0,$$

$$l_3 = 0.$$

所以向量组 $\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 3\alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关。

【解析】

【知识点】

2. 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 并且向量 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ 也线性无关。

【答案】

假设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ 线性相关, 则存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 和 k , 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n + k\beta = 0.$$

若 $k \neq 0$, 则可以将 β 表示为

$$\beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \frac{k_2}{k}\alpha_2 - \dots - \frac{k_n}{k}\alpha_n,$$

这与假设矛盾, 因为 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出。因此, k 必须为0, 即

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0.$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 故 $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$, 所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ 线性无关。

【解析】

【知识点】

3. 设 A 为 n 阶矩阵, 且 $|A| \neq 0$, 证明: AB 与 BA 相似。

【答案】

因为 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。要证明 AB 与 BA 相似, 即证明存在一个可逆矩阵 P 使得 $AB = P^{-1}BAP$ 。

取 $P=A$, 则有

$$P^{-1} = A^{-1}.$$

因此

$$P^{-1}BAP = A^{-1}BAA = A^{-1}(BA)A = (A^{-1}B)AA = A^{-1}BAA = A^{-1}BA = AB.$$

所以 AB 与 BA 相似。

【解析】

【知识点】

一、单选题

1. 下列哪个选项是实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$ 的矩阵表示?

A. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

【答案】A

【解析】根据二次型的矩阵表示，主对角线元素对应于平方项的系数，非对角线元素对应于交叉项系数的一半。因此，矩阵的(1,2)和(2,1)位置应该是-1（对应 $-2x_1x_2$ 项），(2,3)和(3,2)位置也应该是-1（对应 $-2x_2x_3$ 项）。其他位置保持不变。

【知识点】实二次型的矩阵表示。

2. 对于矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ，下列哪个向量是 A 的属于特征值 2 的特征向量?

A. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

【答案】B

【解析】

【解析】为了找到特征向量，需要解齐次线性方程组 $(2E - A)x = 0$ ，其中 E 是单位矩阵。对于特征值 2，方程组变为 $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，解得 $x_1 = -x_2$ ，因此 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是符合条件的特征向量。

【知识点】特征向量的求解。

3. 一个矩阵 A 的秩为 3，下列哪一项是关于矩阵 A 的正确陈述?

A. 矩阵 A 的所有 3 阶子式都不为零。

- B. 矩阵 A 的所有 4 阶子式都为零。
C. 矩阵 A 至少有一个 3 阶子式不为零。
D. 矩阵 A 的所有 2 阶子式都为零。

【答案】C

【解析】矩阵的秩定义为矩阵中最大非零子式的阶数。因此，如果秩为 3，则至少有一个 3 阶子式不为零。

【知识点】矩阵的秩。

4. 在解线性方程组 $Ax = b$ 时，如果系数矩阵 A 的行列式 $|A| \neq 0$ ，那么该方程组的解的情况是？

- A. 无解
B. 无穷多解
C. 唯一解
D. 不确定

【答案】C

【解析】

根据克莱姆法则，如果系数矩阵 A 的行列式 $|A| \neq 0$ ，则方程组有唯一解。

【知识点】克莱姆法则。

5. 如果一个矩阵 A 可逆，则 A 的伴随矩阵 A^* 的逆矩阵是？

- A. A
B. A^{-1}
C. $(A^{-1})^*$
D. A^*

【答案】C

【解析】

对于可逆矩阵 A ， $A^*A = |A|E$ ，其中 $|A| \neq 0$ ，则 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ 。

【知识点】伴随矩阵的性质。

6. 下列哪个矩阵是实对称矩阵？

- A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
C. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
D. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

【答案】B

【解析】

实对称矩阵满足 $A = A^T$ ，即矩阵与其转置相等。只有选项 B 满足这一条件。

【知识点】实对称矩阵的定义。

7. 若矩阵 A 的特征值为 1、2 和 3，那么矩阵 A^2 的特征值是？

- A. 1、2、3
- B. 2、4、6
- C. 1、4、9
- D. 无法确定

【答案】C

【解析】

矩阵 A^2 的特征值是 A 的特征值的平方。因此，如果 A 的特征值是 1、2 和 3，那么 A^2 的特征值将是 1、4 和 9。

【知识点】特征值的性质。

8. 下列哪一个条件是矩阵 A 正定的必要条件？

- A. A 的所有顺序主子式都大于零。
- B. A 的所有顺序主子式都小于零。
- C. A 的所有顺序主子式都不小于零。
- D. A 的所有顺序主子式都不大于零。

【答案】A

【解析】正定矩阵的定义之一是其所有顺序主子式都大于零。

【知识点】正定矩阵的判定条件。

9. 若向量 $\alpha = (1, 2, 3)$ 和 $\beta = (3, 2, 1)$ 的内积为？

- A. 10
- B. 6
- C. 12
- D. 8

【答案】A

【解析】

向量 α 和 β 的内积定义为 $\alpha \cdot \beta = 1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 1 = 10$ 。

【知识点】向量的内积计算。

10.

对于实二次型 $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$ ，下列哪一项描述是正确的？

- A. 正定二次型
- B. 半正定二次型
- C. 负定二次型
- D. 不定二次型

【答案】A

【解析】

该二次型的矩阵表示为 $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ 。计算该矩阵的顺序主子式， $2 > 0$ 且 $2 \times 5 - 2 \times 2 = 6 > 0$ ，因此它是正定的。

【知识点】正定二次型的判断。

11. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ，下列哪个向量是 A 的属于特征值 3 的特征向量？

A. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

【答案】B

【解析】

【解析】为了找到特征向量，需要解齐次线性方程组 $(3E - A)x = 0$ ，其中 E 是单位矩阵。对于特征值 3，方程组变为 $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，解得 $x_1 = 2x_2$ ，因此 $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是符合条件的特征向量。

【知识点】特征向量的求解。

12. 一个 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 1、2 和 3，矩阵 A 的秩是多少？

A.1

B.2

C.3

D.0

【答案】C

【解析】对于一个实对称矩阵，其秩等于非零特征值的个数。既然 A 有三个非零特征值，那么它的秩就是 3。

【知识点】实对称矩阵的性质。

13. 下列哪一个条件是矩阵 A 负定的必要条件？

A. A 的所有偶数阶顺序主子式都大于零，所有奇数阶顺序主子式都小于零。

B. A 的所有偶数阶顺序主子式都小于零，所有奇数阶顺序主子式都大于零。

C. A 的所有顺序主子式都小于零。

D. A 的所有顺序主子式都大于零。

【答案】A

【解析】对于负定矩阵，其所有偶数阶顺序主子式都大于零，所有奇数阶顺序主子式都小于零。

【知识点】负定矩阵的判定条件。

14. 若矩阵 A 的特征值为 1、2 和 3，那么矩阵 A^{-1} 的特征值是？

A.1、2、3

B.2、4、6

C.1、4、9

D. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

【答案】D

【解析】

矩阵 A^{-1} 的特征值是 A 的特征值的倒数。因此，如果 A 的特征值是 1、2 和 3，那么 A^{-1} 的特征值将是 $1, \frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ 。

【知识点】特征值的性质。

15. 下列哪个矩阵是反对称矩阵？

A. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

【答案】A

【解析】

反对称矩阵满足 $A = -A^T$ ，即矩阵与其转置的负矩阵相等。只有选项 A 满足这一条件。

【知识点】反对称矩阵的定义。

16. 若向量 $\alpha = (1, 2, 3)$ 和 $\beta = (3, 2, 1)$ 的内积为？

A.10

B.6

C.12

D.8

【答案】A

【解析】

向量 α 和 β 的内积定义为 $\alpha \cdot \beta = 1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 1 = 10$ 。

【知识点】向量的内积计算。

17.

对于实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$ ，下列哪一项描述是正确的？

A. 正定二次型

B. 半正定二次型

C. 负定二次型

D.不定二次型

【答案】D

【解析】

【解析】该二次型的矩阵表示为 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ 。计算该矩阵的顺序主子式，第一个主子式 $2 > 0$ ，第二个主子式 $2 \times 3 - 2 \times 2 = 2 > 0$ ，第三个主子式 $2 \times 3 \times 5 - 2 \times 2 \times 2 - 2 \times 2 \times 2 = 26 > 0$ ，但由于存在交叉项，无法直接判断其正定性。考虑到 $f(1, -1, 0) = 2 - 4 = -2 < 0$ ，因此该二次型是不定的。

【知识点】不定二次型的判断。

18.若矩阵 A 的秩为 2，下列哪一项是关于矩阵 A 的正确陈述？

A.矩阵 A 的所有 2 阶子式都不为零。

B.矩阵 A 的所有 3 阶子式都为零。

C.矩阵 A 至少有一个 2 阶子式不为零。

D.矩阵 A 的所有 1 阶子式都为零。

【答案】C

【解析】矩阵的秩定义为矩阵中最大非零子式的阶数。因此，如果秩为 2，则至少有一个 2 阶子式不为零。

【知识点】矩阵的秩。

19.

在解线性方程组 $Ax = b$ 时，如果系数矩阵 A 的秩为 3，而增广矩阵 $(A|b)$ 的秩为 4，那么该方程组的解的情况是？

A.无解

B.无穷多解

C.唯一解

D.不确定

【答案】A

【解析】根据线性方程组的解的性质，如果系数矩阵 A 的秩与增广矩阵 $(A|b)$ 的秩不相等，则方程组无解。

【知识点】线性方程组解的存在性。

20.若矩阵 A 可逆，那么矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 的行列式是？

A. $|A|$

B. $|A|^2$

C. $|A|^{-1}$

D. $|A|^{-2}$

【答案】B

【解析】

【解析】对于可逆矩阵 A， $A^*A = |A|E$ ，则 $|A^*||A| = |A|^n$ （这里 n 为矩阵的阶数）。因此， $|A^*| = |A|^{n-1}$ 。对于 $n \times n$ 的矩阵， $n-1 = n-1$ ，所以 $|A^*| = |A|^2$ 。

【知识点】伴随矩阵的行列式。

二、填空题

1. 对于矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, 其特征值为 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = -1$, 属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的一个特征向量为 ____。

【答案】 $(1,1)^T$

【解析】通过求解 $(A - \lambda_1 E)x = 0$ 得到特征向量 $(1,1)^T$ 。

【知识点】特征值与特征向量的计算。

2. 矩阵 $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩为 ____。

【答案】3

【解析】矩阵 B 的行阶梯形矩阵有 3 行非零行，因此秩为 3。

【知识点】矩阵的秩。

3. 行列式 $|C|$, 其中 $C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, 的值为 ____。

【答案】0

【解析】行列式 $|C|$ 的值可以通过展开计算得出，但观察到矩阵的第三行是第一行加上第二行，意味着行列式为 0。

【知识点】行列式的计算。

4. 矩阵 $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ 的秩为 ____。

【答案】2

【解析】矩阵 D 的行阶梯形矩阵有 2 行非零行，因此秩为 2。

【知识点】矩阵的秩。

5. 行列式 $|E|$, 其中 $E = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$, 的值为 ____。

【答案】0

【解析】行列式 $|E|$ 的值可以通过展开计算得出，但观察到矩阵的第三行是第一行加上四倍的第二行，意味着行列式为 0。

【知识点】行列式的计算。

6. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值为 ____ 和 ____。

【答案】3,3

【解析】

【解析】计算特征多项式 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 5) - 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 9$, 解特征方程 $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ 得到特征值 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 3$ 。

【知识点】特征值的计算。

7. 对于实二次型 $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$, 其对应的矩阵表示为_____。

【答案】

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

【解析】

实二次型的矩阵表示形式为 $(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 。

【知识点】实二次型的矩阵表示。

8. 矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的秩为_____。

【答案】3

【解析】矩阵 B 是一个对角矩阵, 并且所有的对角线元素都不为零, 因此秩为 3。

【知识点】矩阵的秩。

9. 矩阵 $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵 C^* 为_____。

【答案】

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

【解析】

矩阵 C 的伴随矩阵 C^* 由 C 的代数余子式转置得到, 即 $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ 。

【知识点】伴随矩阵的计算。

10.

对于矩阵 $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, 其特征多项式为_____。

【答案】 $\lambda^2 - 6\lambda + 9$

【解析】

计算特征多项式 $|\lambda E - D| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -3 \\ -4 & \lambda - 5 & -6 \\ -7 & -8 & \lambda - 9 \end{vmatrix}$, 经过计算可得 $\lambda^2 - 6\lambda + 9$ 。

【知识点】特征多项式的计算。

三、计算题

1.

计算矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值和对应的特征向量。

【答案】

特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$; 特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

【解析】

【解析】首先计算特征多项式 $f(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ -4 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) + 8 = \lambda^2 - 2\lambda + 5$. 解特征方程

$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ 得到特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. 对于特征值 $\lambda_1 = 1$, 求解方程组 $(A - \lambda_1 E)x = 0$ 得到特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

对于特征值 $\lambda_2 = -1$, 求解方程组 $(A - \lambda_2 E)x = 0$ 得到特征向量 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

【知识点】特征值与特征向量的计算。

求矩阵 $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩。

2.

【答案】秩为 3

【解析】首先将矩阵 B 化为阶梯形矩阵。矩阵 B 已经是行阶梯形，可以直接看出它的非零行有 3 行，因此秩为 3。

【知识点】矩阵的秩。

计算行列式 $|C|$ 的值，其中 $C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

3.

【答案】0

【解析】

【解析】计算行列式 $|C|$ 的值: $|C| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (45 - 48) - 2 \cdot (36 - 42) + 3 \cdot (32 - 35) = -3 + 12 - 9 = 0$

【知识点】行列式的计算。

对于矩阵 $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, 求 $r(D)$ 。

4.

【答案】2

【解析】

【解析】矩阵 D 的秩可以通过计算其行阶梯形矩阵的非零行数来确定。矩阵 D 的行阶梯形矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 因此秩为

2。

5.

计算行列式 $|E|$ 的值, 其中 $E = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$.

【答案】0

【解析】

【解析】计算行列式 $|E|$ 的值: 行列式 $|E|$ 可以通过计算第一行的余子式来简化, 但更简单的方法是观察到矩阵的第三行是第一行加上四倍的第二行, 这意味着矩阵的行列式为 0。

【知识点】行列式的计算。

四、证明题

1. 设矩阵 A 为 n 阶矩阵, 并且 $|A| \neq 0$, 证明矩阵 A 可逆。

【答案】

【答案】要证明矩阵 A 可逆, 需证明存在矩阵 B 使得 $AB = BA = E$ 。由于 $|A| \neq 0$, 根据行列式的性质, 这意味着 A 的行向量组线性无关, 进而 A 的列向量组线性无关。因此, A 可以通过一系列初等行变换转化为单位矩阵 E , 即存在一系列初等矩阵 $P_1, P_2, \dots, P_k$ 使得 $P_k P_{k-1} \dots P_1 A = E$ 。由于初等矩阵都是可逆的, 所以 A 也可通过这些初等矩阵的逆矩阵 $P_1^{-1}, P_2^{-1}, \dots, P_k^{-1}$ 来左乘 E 得到 A , 即 $A = P_1^{-1} P_2^{-1} \dots P_k^{-1} E = P_1^{-1} P_2^{-1} \dots P_k^{-1}$ 。因此, 取 $B = P_k P_{k-1} \dots P_1$ 即可使得 $AB = BA = E$, 从而证明 A 可逆。

【解析】根据行列式非零的性质, 结合初等变换的知识进行证明。

【知识点】矩阵的可逆性与行列式的性质。

2. 若 A 是 n 阶矩阵, 并且存在非零向量 α 使得 $A\alpha = 0$, 证明 A 不可逆。

【答案】

【答案】要证明矩阵 A 不可逆, 即证明不存在矩阵 B 使得 $AB = BA = E$ 。由于存在非零向量 α 满足 $A\alpha = 0$, 说明 A 的列向量组线性相关, 即 A 的秩小于 n 。根据矩阵可逆的条件之一, 矩阵可逆当且仅当其秩等于阶数, 即 $r(A) = n$ 。因此, 既然 A 的秩小于 n , 那么 A 必定不可逆。

【解析】根据矩阵的秩与可逆性的关系, 结合线性相关的定义进行证明。

【知识点】矩阵的可逆性与秩的关系。

3. 设 A 是 n 阶矩阵, 如果 $A^2 = A$, 证明 A 的特征值只能是 0 或 1。

【答案】

【答案】设 λ 是矩阵 A 的一个特征值, 对应的特征向量为 α , 即 $A\alpha = \lambda\alpha$ 。由于 $A^2 = A$, 将 α 代入得到 $A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda(\lambda\alpha) = \lambda^2\alpha = A\alpha = \lambda\alpha$ 。由此可知 $\lambda^2\alpha = \lambda\alpha$, 即 $\lambda^2 = \lambda$ 。因此 λ 必须满足 $\lambda^2 - \lambda = 0$, 解得 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 1$ 。

【解析】根据矩阵幂等性的性质, 结合特征值的定义进行证明。

【知识点】矩阵幂等性与特征值的关系。